宮崎女子短期大学紀要　第17号　57－69頁

分数概念の習得過程に関する発達的研究

栗山和広・吉田　甫

A Developmental Analyses on The Acquisition Process of The Concept of Fractions

Kazuhiro KURIYAMA and Hajime YOSHIDA

Summary

This developmental study examined acquisition process of the concept of fractions and relationships of the concept. A total of 161 children have been administrated six tests over 3 years. Two principle incorrect strategies were found concerning the magnitude of fractions. The first was Rule A, in which children ordered the fractions with a larger numerator as a smaller magnitude in problems with the S－D type. Another was Rule B, in which children ordered the fractions with larger denominators as a greater magnitude in the D－S type. Change processes of these strategies suggested four process of acquiring the concept of fractions. In addition, it was shown that the process of the acquisition of the magnitude of fractions was different from acqusition process of other sub-concepts in fractions. These results were discussed in terms of the process of the integration of the concept of fractions to knowledge of the decimal number system.

key words : acquisition process, concept of fractions, incorrect strategies, magnitude of fractions, decimal number system.

人がどのようにして知識を習得していくかについては，最近さまざまな研究がおこなわれている。知識の習得過程の中でも重要なことは，ある領域において手続き的知識と概念的知識という2種類の知識を獲得することであると主張されている（Hiebert & Lefevre, 1986； Carpenter, 1986)。この2種類の知識を正確に規定することは，いささかむずかしいが，そこでの基本的なメカニズムは，Piaget（1960）が正しく述べたように，すでに獲得している既有知識の中へ新しい概念を統合する過程であると考えられる。

本研究は，そうした統合の過程を分数概念を用いて実証することである。分数は，小数と同じく，小学校で子どもが初めて出会う端数の概念であり，中学校では有理数へとつながっていくきわめて重要な概念である。子どもが分数を学習する以前の知識の状態を考えてみれば，彼らの既

有知識はすべて整数の知識で構成されている。したがって，本研究でとりあげる端数としての分数をどのように子どもが習得するかというテーマは，知識習得の過程を研究するには　最適な材料といってよいだろう。

一方この概念は，小学校算数の中では子どもにとってもっとも難しい概念の１つである。高校生になっても分数の計算ができない生徒がいるという形で，しばしば報道される。

このように，分数はいろいろな意味で重要な概念であるのだが，残念ながら関連する研究はとても少ない。もっとも，授業実践の形でならば，それこそ無数といっていいほどの報告が出されている。しかし，こうした研究は分数がなぜ難しいかといった疑問に応えるものでは全くない。

なぜ分数は，子どもにとってむずかしいのだろうか。これについて，数学教育の立場から石田（1985）は，以下の３つの要因をあげている。第１は，分数概念の意味の多様性，第２には，分数の意味の複雑性，第３に分数の表記の複雑性の３つである。しかし，これらの指摘は，いずれも数学教育という立場からの要因であり，子どもの視点からの要因ではない。

分数を扱った心理学的研究がいくつかあるのだが（Behr, et al., 1984； Behr, et al., 1985；Hunting & Sharpley, 1988； Pothier & Sawada, 1983)，これらもそうした疑問に応えるものではない。認知心理学的視点から，Yoshida & Kuriyama （1988）は，以下のような多くの要素があることが分数概念の理解を困難にしていると指摘している。それらは，分数の大小関係，全体としての１の概念(分数における等分割を含む)，計算能力の３つである。ただし，これらの要素がどのようにして理解され，またお互いにどのように関連して難しさを構成しているかなどは，まだ研究されていない。

これらの要素の内，分数の大小関係については，Yoshida & Kuriyama（1988）が興味ある報告をしている。彼らは，分数の大小関係に対する子どもの方略が彼らの既有知識から引き出されていることを示唆している。彼らは，子どもが分数の大きさを判断するときに，おもに２つの誤った方略があることを見いだした。第１は，ルールＡと呼ばれる方略で，これは同分母で異分子の問題を比較する状況でみられるものである。つまり，分子の大きさが大きくなるほど分数の大きさは小さくなると考える方略である。第２は，ルールＢの方略であり，これは異分母で同分子の問題でみられる方略である。つまり，分母の大きさが大きくなるほど分数の大きさも大きくなるという方略である。

これらの誤った方略を見ると，ルールＢは分母が大きくなるほど分数の大きさも大きくなるというものであり，これは整数の知識とぴったり一致している。このことから，ルールＢは整数の知識にしたがった方略であることが仮定された。一方，ルールＡは分子が大きくなるほど分数の大きさは小さくなるというもので，これは全体を分割するほど１つ分は小さくなるという分数の概念をある意味で反映したものであるとみなされる。このことから，ルールＡは分数の誤った知識を反映した方略であると仮定された。

本研究では，子どもが学校で分数単元の授業を受けることによって，分数の大小関係に関する知識がどのように変化するかを調べることが，第１の目的である。分数単元は，３年で初めて導入され，６年までの４年間かかって教えられる概念である。そこで，分数単元の授業の前後の子どもの理解の様子を３年間縦断的に同一の子どもを追跡することによって，分数の大小に対する理解が教授的介入によってどのように変化し，知識の統合過程がどのように進行するかを縦断的

に検討する。

第2の目的は，分数概念の構成要素としての大小関係についての習得過程がある程度同定できたならば，そうした習得過程が分数の他の構成要素とどのように係わっているかを検討することである。大小関係の要素で観察される過程が，他の要素でも同じように見られるか，あるいは関連がないのかを追求する。

方　法

被験児　宮崎市内の○小学校の初年度3年生221名が，対象者となった。本研究は，縦断研究であるので，3年間にわたる合計6回のテストすべてに参加した161名が，本研究での分析の対象者となった。

材料　分数概念を構成するテストの内容は，以下のとおりである。(1)分数の大小関係，(2)全体としての1の概念（部分－全体関係，等分割）と分数の大きさの概念（分数の大きさの判断と作図），(3)計算技能の3つである。テストの形式は学年によって少し異なっていたが，基本的な内容はほぼ同じであった。以下に各テストの代表的な形式を挙げてみる。

(1)分数の大小関係では，3つ以上の分数の大小関係の判断を求める並べかえ課題が用いられた。ただし，3年生の事前テストではまだ分数概念を学習していないため，整数の形式で分数の大小のテストが与えられた。その例としては，「1つのチョコレートを，2人で同じ大きさに分けるときと，3人で同じ大きさずつに分けるときとでは，どちらの方が1人分は大きくなるでしょう。」問題数は3問である。

3年生の事後テストと4年の事前テストでは，同一の形式の問題が用いられた。つまり，同分母－異分子(同－異と略する)の3つの分数についての並べかえ課題4問と，異分母－同分子(異－同と略する）の3つの分数の並べかえ課題3問である。

4年生の事後テストと5年生の事前および事後テストの並べかえ課題では，異分母－異分子（異－異と略する)の形式の問題が追加された。それぞれのテストでの問題数は同じであり，同－異の問題2問，異－同の問題2問，異－異の問題3問であった。問題例の一部が Table 1－1に示されている。

(2)全体としての1の概念では，部分－全体関係，等分割，分数の大きさの同定と作図等の種類の問題から構成されていた。なお，これらの問題は3年生の事後テスト以降で出題された。まず部分－全体関係の問題は，Table 1－2にみられるように，全体の中における部分はどれくらいかを問う問題であった。4年生の事前テストと5年生の事後テストで2題，他のテスト時期では1題出題された。等分割の問題は，Table 1－3にみられるように，ある分数の大きさと等しいものをいくつかの図の中から選ぶものであった。等分割の問題数は，各時期においてそれぞれ1問含められた。大きさの問題は，Table 1－4にみられるように，分数の大きさを図にかいて表す問題2問であった。なお，実際に使用された問題は，学年によって少しずつ違っている。

(3)計算では，各学年で習得する計算内容について4問から10問の問題が出題された。3年生事後テストと4年生事前テストでは，同分母のたし算とひき算問題が用いられたが，4年生の事後テストと5年生の事前テストでは，整数部分からかりてくるひき算問題も使用した。5年生の事

Table 1　本実験で使用した課題の一部

1．(並べかえ課題)　次の数を小さい順に並べましょう。

0，5／7，4／7，2／7，1　　(同分母－異分子)

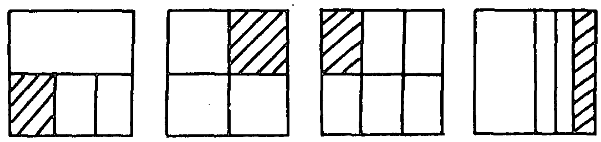
0，2／7，2／5，2／3，1　　(異分母－同分子)

1，2／3，5／12，1／6，0　　(異分母－異分子)

2．(部分－全体関係)　カステラがあります。おにいさんが，カステラの半分を食べました。次の日，まさお君とおにいさんで，のこりのカステラを半分ずつ分けました。まさお君が食べたカステラは，全体の何分の何でしょう。

3．(等分割)　次の図で斜線の部分の大きさが，全体の4分の1になっているものはどれでしょう。

(ア)　(イ)　(ウ)　(エ)



4．(大きさ)　次の数直線に1/2と3/4をかきこみましょう。

後テストでは，通分を必要とする異分母のたし算とひき算も問題に含めた。

手続き　手続きは単元の授業の前の事前テスト，分数単元の授業，その後に事後テストという流れをとった。

事前テストは，原則的に各学年の分数単元のおよそ2月前，つまり1986年，1987年，1988年の各9月中旬から下旬にかけて実施された。テストの終了後に，1人の子ども毎に方略の推定をおこなった。これらの分析が終わった後，各クラスの担任教師に事前テストの分析結果についてのフィードバックが与えられた。さらに，事前テストの結果を基にして，分数の単元をどのように教えるかということで，大学側との話合いがおこなわれた。単元の授業に対しては，著者らが録画しながら観察することを原則とした。事後テストは，分数単元が教授されたおよそ1週間後に実施された。このような形式の繰り返しによって，3年生が5年生になるまでの3年間にわたって研究が続けられた。

各学年の単元内容と大まかな教授方法は，以下のとおりであった。3年生では，まず分数の意味として，テープや数直線をつかって1/3，2/3，1/10といった簡単な分数の意味が教えられた。次に，分数の大きさとして，1は3/3，5/5であることや1/5と3/5との大きさの比較などが教えられた。最後に，同一異のパターンを利用した簡単なたし算とひき算が導入された。この単元の授業時間数は，クラス間で平均して10時間であった。

4年生では，まず分数のタイプとして，真分数，仮分数，帯分数が導入された。その後に，等

しい分数の意味として，たとえば，1/2 と 2/4とは等しいといったことが教えられた。最後に，分数のいろいろのタイプを使ったたし算とひき算の計算が教えられた。この単元の授業時間数は，平均10時間であった。

5 年生では，分数の新しい側面が導入された。つまり，分数は分子を分母でわると小数になることが教えられた。次に，約分は分数の分母と分子を同じ数でわって，分母の小さい分数にすること，および通分は分母の違ういくつかの分数を分母が同じ分数になおすことが教授された。また，分数と整数および小数の関係についても言及し，最後に異分母のたし算とひき算が教えられた。この単元の授業時間数は，平均して18時間であった。これらの授業の後に，事前テストと基本的には同じ事後テストがおこなわれた。

誤り方略の判定　大小関係について子どもがどのような方略をもっているかは，Yoshida & Kuriyama（1988）にしたがった。つまり，同－異の問題では，分子が大きくなると分数の大きさは小さくなるように並べている方略が，ルール A に分類された。異－同の問題では，分母が大きくなると分数の大きさも大きくなるように並べている方略が，ルール B として分類された。

異－異の問題では，分母と分子がそれぞれ異なるために，先述の 2 つとはやや異なる方略がみられたが，基本はルール A や B と同一である。つまり，分母または分子のどちらかのみに着目して，その大きさで分数の大小を決める方略である。分母と分子，それにルール A または B の 2 つの要因から計 4 つの方略が観察されることになる。ルール C1は，分母を無視して分子が大きくなれば分数の大きさは小さくなる方略である。ルール C2は，分子が大きくなれば分数の大きさは大きくなる方略である。ルール C3は，分母が大きくなれば分数の大きさも大きくなるルール，ルール C4は分母が大きくなれば分数の大きさは小さくなる方略である。こうした例から分かるように，ルール C1と C4はルール A と同じ論理が控えており，ルール C2と C3はルール B と同じ理論によっている。

児童のタイプ分け　大小関係における並べかえ課題を基準にして，それぞれのルールをもつ児童を以下の群のいずれかに分類した。

(1)正答群：正答率が80％以上で，かつ誤り方略が 1 以下の者。

(2) A 群：ルール A の方略が 2 以上で，かつルール B が 1 以下の者。

(3) B 群：ルール B の方略が 2 以上で，かつルール A が 1 以下の者。

(4) AB 群：ルール A と B の両方とも 2 以上の者。

なお，4 年の事後テスト以後では，異－異のパターンが導入されているので，A 群と B 群は，同－異または異－同のパターンへの方略と異－異への方略の組合せから，それぞれ 3 つの下位群のどれかに分類された。

(5) C (A) 群：同－異においてルール A が 1 以下だが，異－異においてルール C1または C4が 2 以上の者。

(6) A（C）群：同－異問題においてルール A が 2 以上だが，ルール C は 1 以下の者。

(7) AC 群：同－異においてルール A が 2 以上でかつ異－異においてルール C1または C4が 2 以上の者。

(8) C (B) 群：異－同においてルール B が 1 以下だが，異－異においてルール C2または C3が 2 以上の者。

(9) B（C）群：異－同においてルールBが2以上だが，異－異においてルールCが1以下の者。

(10) BC群：異－同においてルールBが2以上でかつ異－異でルールC2またはルールC3が2以上の者。

(11)他群：上記の分類に入らない者。

結果と考察

1．分数の大小関係

それぞれのテストにおける並べかえ課題を基にして，すべての子どもが上述の基準にしたがっていずれかの群に分類された。それぞれの群に分類された子どもの割合が，Table 2 に示されている。Table 2 から見られるように，分数の概念を学習する以前（3年事前）には，ほとんどの児童が分数の意味を整数的には正しく理解していることが分かる。だが，3年で分数単元を学習することにより，そうした informal な知識に基づく理解から formal なルールを学習することは，かえって informal な正しい理解に妨害的な効果を与えたようである。つまり，正答群は86％から25％も減少しているのである。そのかわりに，B群がおよそ7％から29％へと大幅に増加した。

その後の約10ヵ月間分数を学習しなかったことで，3年事後で観察された傾向は，4年の事前テストになるとさらに大きく増幅してきていることが分かる。つまり，正答群は全体のわずか23％に落込み，そのかわりにB群が全体の43％と大きく増加している。

このことは，何を意味しているのであろうか。ルールBは，分母が大きくなれば分数の大きさも大きくなるという方略である。したがって，方略Bは整数の知識ときわめて類似している。このことから考えれば，3年で分数を学習した直後には，ある程度の分数の知識が子どもに取り込まれたようであるが，かなり長い間分数を学習していないと，再び整数の知識に戻ってしまうことを示唆するものであろう。

Table 2　各テスト時期におけるそれぞれの方略群の割合

		3年		4年		5年	
		事前	事後	事前	事後	事前	事後
正答群		.86	.61	.23	.34	.34	.49
	C(A)				.03	.21	.14
A　群	A(C)	−	.04	.19	.26	.01	.01
	AC				.09	.07	.06
	C(B)				.07	.16	.08
B　群	B(C)	.07	.29	.43	.03	.02	.01
	BC				.09	.10	.10
AB群			.05	.07	.02	.03	.02
他　群		.07	.01	.08	.07	.06	.09

しかし，４年生で分数単元を再び学習することによって，全体の傾向は大きく変化している。正答群は４年生の事前テストの23％から，事後テストでは34％と少し増加している。Ｂ群は，事前テストでは43％であったが，事後テストでは19％とかなり減少している。そのかわり，Ｂ群にかわって，Ａ群が事前テストでの19％から事後テストでは39％と大きく増加している。４年生で学習する分数の内容は，真分数，過分数，帯分数が導入され，次に等しい分数が教えられ，その後，たし算とひき算が教えられる。特に，前者の２つによって，かなり分数への理解は深まり，整数の知識を克服できると考えられる。そのことが，誤った方略としてのルールＡが増える主な要因となっていると考えられる。というのは，ルールＡは，分子が大きくなれば分数の大きさは小さくなるというものである。これは，分数では要素にたくさん分割すればするほど，１つ分の大きさは小さくなるという知識と密接に関連している方略であると考えられる。したがって，ルールＡはある程度分数的な知識を背景にしているといえよう。

４年生での分数の学習が終わってから５年生で分数を学習するまでには，およそ10ヵ月間ほどの空白がある。３年生から４年生にかけての分数学習の空白期間には，正答群が減少し，Ｂ群の増加がみられたが，４年生から５年生にかけてもある程度類似した傾向がおきている。Table 2 から見られるように，正答群の割合には変化は見られないが，Ｂ群が９％程増加しており，そのかわりにＡ群は９％程減少している。Ｂ群の増加量は，３年生から４年生にかけてほどは大きくはないが，方向性としては同一である。４年から５年にかけての空白期間にも，再び分数の知識から整数の知識にある程度逆戻りしたと考えられる。

５年生の事前テストの結果を教師がフィードバックされた後，彼らは再び熱心に分数について教授したようであった。それにもかかわらず，誤った方略を所持している児童が５年の事後テストで合計して42％も見られた。４年生までに分数の意味の学習を終え，５年生以後では分数の計算を学習する。それ故，５年生になっても半数近くの児童があやまった方略を所持していることは，重要な問題であろう。

２．全体としての１の概念

Table 1に示されたような問題に対しては，さまざまな誤った方略が観察された。それぞれの方略を示した子供の人数を求めたが，本論文でこれらすべての方略をとりあげることはあまり意味がない。各学年のそれぞれのテストにおいて，特定の方略を所有する子供の割合が5％以下ときわめて少ない方略は，ここでの分析から除外した。

まず部分－全体関係では，おもに２つの誤った方略が観察された。ルールG1は，問題の中の２度目の分割の部分のみで分数の大きさを判断するルールであった。Table 1－2の問題でいえば，答が1/2となるものである。ルールG2は，等分割の誤った考えで答える方略であり，Table 1－2の問題でいえば，答が１/３となる。

次に等分割の概念では，おもに１つの誤った方略が見られた。ルールP1は，分割される大きさを無視して，わけられた部分のみを１つの要素として考える方略である。Table 1－3の問題にしたがえば，大きさを無視して(ア)，(イ)，(エ)を選択する方略である。

最後に分数の大きさでは，おもに２つの誤った方略が観察された。ルールF1は，分子の数をその分数の大きさとする方略があり，Table 1－4でいえば左から１番目と３番目に書き込む答えとなる。ルールF2は，分母の数で分数の大きさを表現する方略で，Table 1－4の問題でいえば

左から２番目と４番目に書き込む答えとなる。

こうした方略は，問題によっては１問だけ用いられたこともあり，大小関係で設定されたような２問以上の方略を示した者をその方略の所持者という基準を適用できない。このため，ある方略を１つでも所持している子どもは，その方略をもつ群として分類された。その結果，部分－全体ではG1群とG2群，等分割ではP1群，大きさではF1群とF2群という群が設定された。

まず，各学年のそれぞれのテストにおいて，それぞれの方略を所有する児童の人数の割合がTable 3に示されている。部分－全体の方略についてみると，G1群は，学年が上がるとしだいに割合が増加してくる。５年後期では55％とかなりの児童がG1の方略を所有していることがわかる。このことから考えると，部分－全体の誤った方略はなかなか消失しないといえよう。G2群の割合は，学年があがるにつれしだいに減少している。G2は誤った分割のルールであり，整数という既有知識には影響されない方略であると考えられるので，G1のように学年があがっても増加しないのかもしれない。

こうした考察は，次の分析でもある程度観察された。ここでは，目的のところでも述べたように，この部分－全体という下位概念と大小関係とになんらかの関連があるかどうかを検討した。分数の大小関係という知識は，その意味からして部分－全体という概念との関連性は弱いと予想される。各テスト時期ごとに，大小関係についてのそれぞれの方略群においてG1, G2を所有する児童の人数の割合が，Table 4に示されている。G1についてみると，A群におけるテスト全体での平均所持者は28％であり，B群では26％であった。また，それぞれのテスト時期毎にみても，それほど２つの方略群のどちらかに特に顕著な傾向は認められない。このことは，G1という方略は，方略のAやBのどちらかに特に関連があるとはいえないことを示している。G2についてみても，群間に差はほとんどなかった。こうして，G2は整数の知識の反映であるとみなされるルールBとも特に関連がなく，既有知識の影響をあまりうけていないことを示唆している。

つぎに，Table 3の等分割での典型的な誤った方略であるP1では，４年事後では40％とかなりの児童がこの方略を示しているが，それ以外のテストでこの方略を示す児童に大きな変動は認め

Table 3　部分－全体，等分割，大きさの要素において誤った方略を所有する児童の割合

要素	3年 事後	4年 事前	4年 事後	5年 事前	5年 事後
部分－全体					
G 1	.06(11)	.09(15)	.27(44)	.21(35)	.55(89)
G 2	0(0)	.10(17)	.08(14)	.02(4)	.03(5)
等分割					
P 1	.16(26)	.17(28)	.40(66)	.01(1)	.13(22)
大きさ					
F 1	－	.18(30)	－	.40(66)	－
F 2	－	.28(55)	－	.14(24)	－

注　(　)内は人数である

Table 4　大小関係のそれぞれの方略群においてＧ１，Ｇ２を所有する児童の割合

	3年 事後	4年 事前	4年 事後	5年 事前	5年 事後	平均
Ｇ１						
正答群	.03(3)	.10(4)	.16(19)	.20(11)	.43(34)	.13(61)
Ａ　群	.16(1)	.03(1)	.24(15)	.23(11)	.67(23)	.28(51)
Ｂ　群	.12(6)	.14(10)	.48(15)	.26(12)	.62(20)	.26(63)
ＡＢ群	.12(1)	0(0)	.33(1)	0(0)	1.00(3)	.16(5)
他　群	0(0)	0(0)	.36(4)	.10(1)	.14(7)	.24(12)
Ｇ２						
正答群	−	.05(2)	.07(4)	0(0)	0(0)	.01(6)
Ａ　群	−	0(0)	.09(6)	.04(2)	.05(2)	.05(10)
Ｂ　群	−	.18(13)	.09(3)	.04(2)	.06(2)	.08(20)
ＡＢ群	−	.18(2)	.33(1)	0(0)	.33(1)	.13(4)
他　群	−	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)

注　(　)内は人数である

られない。等分割とは，１を分母の数で等しく分割するという概念であり，これは分数に固有の概念であると考えられる。

P1についても大小関係の方略との関係について検討した。各時期ごとに大小関係のそれぞれの方略群におけるP1を所有する児童の人数の割合がTable 5に示されている。P1を所有している児童との大小関係のルールを所有している児童との間に，目だった傾向は見られなかった。このことから，上述したように，P1は分数固有の概念であり，このため大小関係での方略と関連がなかったのであろう。

次に，Table 3の大きさの概念で観察された誤った方略を分析してみる。まず，F2は，分母の数をその分数の大きさとみなす方略である。これは，分子にかかわらず分母が大きくなればその分数は大きくなると考える方略であり，その意味では整数的な知識を反映していると考えられる。

Table 5　大小関係のそれぞれの方略群においてＰ１を所有する児童の割合

	3年 事後	4年 事前	4年 事後	5年 事前	5年 事後	平均
正 答 群	.15(15)	.08(3)	.18(10)	0(0)	0(0)	.08(28)
Ａ　群	.33(2)	.13(4)	.37(23)	.02(1)	.17(6)	.20(36)
Ｂ　群	.14(7)	.21(15)	.67(21)	0(0)	.18(1)	.19(44)
Ａ Ｂ 群	0(0)	.09(1)	.66(2)	0(0)	.66(2)	.16(5)
他　群	1.00(2)	.38(5)	.90(10)	0(0)	.23(3)	.40(20)

注　(　)内は人数である

一方，F1は，分子の数をその分数の大きさとみなす方略であり，この意味ではルールAと同じく，分数的な知識を背景にした方略であると仮定される。この視点から，F1とF2を見てみると，F1は4年前期では18%であったのが5年前期になると40%に増加している。このようにF1が増加したのは，分数の単元を2年間学習してある程度分数への理解が深まった結果ではないかと考えられる。ところが，F2は4年前期で28%であったものが5年前期では14%と減少している。このことは，F1が増加したことと裏表の関係であるとみなされる。つまり，5年になって分数の知識の理解が深まり，整数という既有知識の影響が弱くなったことの反映であることを示唆している。

こうしたことから，大小関係の方略とF1, F2との関連についても同じような関連性が期待できよう。大小関係のそれぞれの方略群毎にF1, F2を所有する児童の人数の割合を示したTable 6からは，そうした予想が支持されていることが分かる。つまり，F1ではA群に占める割合が4年事前から5年事前にかけて31%も増加している。しかし，F2では，B群に占める割合は4年から5年にかけては23%も減少しているのである。こうして，F1とF2に関する先述の仮定は，かなり支持されているといえる。なお，AB群では，F1とF2の両方ともこれらの方略を示す児童が増加しているが，AB群に分類された児童数が少ないので，それほど安定した傾向とも言えないかもしれない。

3．計算

分数の計算については，3年間のテストをつうじて合計94もの誤り方略が発見された。これらすべての方略をここに紹介することはできないので，まずこうした誤った方略を所持していた子どもの割合を求めてみた。Table 7には，80%以上の正答を示した子どもを正答群として分類し，それぞれの誤り方略のタイプは無視して合計して2問以上の誤り方略を示したものを方略群として分類した結果が示されている。この結果から明らかなように，計算に関しては，学年が上がるにつれて誤った方略を持つものが増加している。特に，5年で異分母の計算が導入されることによって多様な方略が出現していることは，明らかであろう。

こうした方略の内容を分類してみると，おもに3つのカテゴリーに分類された。第1は，正しい手続きにきわめて類似しているが，その1部が抜けていたり，あるいは余分な手続きが追加さ

Table 6　大小関係のそれぞれの方略群においてF1，F2を所有する児童の割合

	F1			F2		
	4年 事前	5年 事前	平均	4年 事前	5年 事前	平均
正答群	.18(7)	.27(15)	.24(22)	.13(5)	.02(1)	.06(6)
A群	.22(2)	.53(25)	.34(27)	.16(5)	.13(6)	.14(11)
B群	.17(12)	.30(12)	.21(24)	.47(33)	.24(11)	.38(44)
AB群	.36(4)	.60(3)	.46(7)	.09(1)	.60(3)	.25(4)
他群	0(0)	.80(8)	.34(8)	.23(3)	.60(6)	.39(9)

注　(　)内は人数である

Table 7　計算における方略群の割合

	3 年	4 年		5 年	
	事後	事前	事後	事前	事後
正 答 群	.98	.89	.88	.73	.56
方 略 群	.01	.06	.02	.26	.43

れていたりといった内容である。第2は，他の領域の知識を借りてくるカテゴリーである。その知識は，すべて整数のそれである。たとえば，1を7/7とせずに10/7のように変換したりする内容である。第3は，これら2つのカテゴリーと違って，その子どもが独自に考案した内容があげられる。こうした傾向は，過去の研究（吉田，1983）とほぼ類似したものであった。

知識の統合過程という観点から興味あるのは，第2の分数の計算に整数の知識を借用するというタイプである。つまり，児童は自分の知識で解決できないような問題状況に対しては，分数ではなく整数の知識に依存してしまうということは，容易には新しい知識が既有知識と統合されないことを示唆している。

全体的考察

本研究では，分数という知識の統合過程を検討することが第1の目的であった。過去の研究がこうした統合過程を研究するさいには，実験的に与えられる材料がほとんどであった（Bransford, et. al., 1972； Paris & Upton, 1976）。このため，そうした研究で仮定された既有知識とは子どもが持つ全体的な知識構造であり，その内容を明確に特定することができなかった。したがって，そうした研究で統合過程を扱っているとは言っても，きわめてあいまいな統合過程と考えざるをえない。

これに対して，本研究では既有知識となるものは3年までに学習してきた整数の知識であると明確に同定できる。そこに，端数の概念である分数が新しく取り込まれる過程を研究するので，分数は知識の統合過程を検討するための最適な材料の1つだろう。そうした視点にたって統合過程を研究したのは，我々が知る限りでは，Resnick et. al. （1987）の研究ぐらいである。彼らは，代数問題を用いてそうした統合過程に関して4つの段階を提案している。そこでの統合の視点は，代数問題における式と問題の意味とを関連づけるための方略を基準にして，段階が提案されている。

本研究では，分数の大小関係を主要な手がかりとして，分数が整数という既有知識に統合される過程が検討された。その結果，分数の習得過程についていくつかの段階が仮程された。まず第1段階は，分数に初めて接する段階である。この段階で，子どもは分数の意味をまったく知らないわけではない。3年の事前テストにみられたように，informal な知識としては，かなり正確なものを持っているのである。

第2段階では，分数が既有知識の中に一応取りこまれるが，それが既有知識に働きかけて新しい概念との間に相互作用が生じるのではない。あくまでも，既有知識の点から新しい材料を捉え

る段階である。

この段階は，3年の事後テストにおいてルールBを示した児童が多いことからも示唆される。つまり，3年生における3週間の分数単元の学習では，児童は容易には分数的な意味を理解しないことを示している。さらに，分数概念から離れていた10ヵ月間の間に子どもの知識はまた既有知識に戻ることを示している結果からも明かである。この傾向は，4年で分数を学習し，次の5年で再び学習するまでのおよそ1年の間にもある程度観察されている。

さらに少し異なる視点であるが，分数の計算の中にもこうした整数の知識の侵入が見いだされた。そうした方略が見いだされたのは，おもに5年生の事後テストであることを考えれば，既有知識からの脱却は児童にとってかなり困難な課題であると考えられる。

こうした段階が，なぜ存在できるのだろうか。それは1つには，分数という概念の特性からくるのかもしれない。つまり，2つ以上の同分母－異分子の分数の大きさを比較する場合には，分母が同じなので分子の大きい方が分数の大きさは大きくなる。これは，まさに整数の知識とぴったり一致する。実際，B群の子どもは，この型の問題にはほとんど正答しているのである。しかし，整数的な知識では，異分母－同分子の分数を比較するさいには，もちろん誤りとなる。つまり，そうした知識を持っていても，全ての状況で間違うならばそうした知識は修正され易いかもしれない。しかし，困ったことに，ある状況では正答し，別の状況では間違うのである。こうした理由によって，この第2段階がかなり続くのではなかろうか。

第3段階は，分数の知識がかなり既有知識の中に取り込まれるが，それらが統合されたというよりも，両方の知識系が並存している段階であると考えられる。これは，ルールAを示す児童に反映されていると考えられる。つまり，3年から4年と2年間にわたって分数を学習した後には，ルールAを示すものは，合計して35%にも達している。彼らは，B群とは違って，異分母－同分子の問題では正しく反応するが，問題としては易しいはずの同分母－異分子の問題で誤った方略を示すのである。ここに彼らの知識は分数的であるが，その適用が誤っていることが示唆される。つまり，分数では，全体を分割するほどその1つ分は小さくなる。この知識は，異分母－同分子の問題ではぴたりと当てはまる。しかし，分母が等しくなると，その知識をそのままの形で分子に適用するのであると思われる。

第4段階では，分数系の知識を整数系に統合できる段階である。この段階では，分数と整数のシステムを明らかに区別し，それを状況に応じて使い分ける段階である。

さて，このような習得過程の段階は，児童に対する縦断的な分析から仮定されたものである。今後の問題としては，こうした段階が，一人ひとりの児童についてあてはまるかどうかを検討しなければならないだろう。そのためには，縦断的に個別面接を繰り返す研究が，今後の1つの課題である。

本研究では，第2の目的として，分数における部分－全体，等分割，大きさといった下位の概念が，大小関係で見いだされたのと同じ習得過程にしたがうのか，異なるのかを検討した。その結果，大小関係という概念と，特に部分－全体や等分割とはかなり異なることが見いだされた。ただ，作図などで示された大きさの概念における傾向は，分数の大小関係で見られたことと同じように3年生，4年生では既有知識の影響を受けているが，5年生になるとその影響が小さくなり分数概念の理解が深まっていることが明らかにされた。

しかし，部分ー全体や等分割では必ずしもそうではなかった。部分ー全体では，５年生になってもまだかなりの児童が誤った方略を持ち続けていることが明らかになった。このことは，分数という概念が全体としてそれほど簡単に学習されるものではないことを意味するものであろう。さて，等分割は，学年を通して誤った方略を持ち続けるものが一定数いることが示されている。等分割は，その意味からして分数に固有の概念であるので，こうした結果が得られたものと考えられる。

引 用 文 献

Bransford, J. R., Barclay, J. R., & Franks, J. J. 1972 Sentence memory: A constructive versus interpretive approach. *Cognitive Psychology*, **3**, 193-209.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T., & Lesh, R. 1984 Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research Mathematical Education*, **15**, 323-341.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., & Post, T. R. 1985 Construct a sum: A measure of children's undeatanding of fraction size. *Journal for Research in Mathematics Education*, **16**, 120-131.

Carpenter, T. P. 1986 Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning. In J. H. Hiebert (Ed.) *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. LEA, Hillsdale, NJ.

Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986 Conceptual and Procedual Knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Hiebert, J. (Ed), *Conceptual and procedual knowledge: The case of mathematics*. LEA Hillsdale, Nj.

Hunting, R. P.,& Shrpley, C. F. 1988 Fraction knowledge in preschool children. *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**, 175-180.

石田忠男　1985　分数・少数の意味理解はなぜむづかしいか　算数教育，**27**, 21-27.

Paris, S. G. & Upton, L. R. 1977 Children's memory for inferential relationships in prose. *Child Development*, **47**, 660-668.

Piaget, J. 1960. The psychology of intelligence. Totowa, NJ: Littlefiel, Adams.

Pothier, Y. & Sawada D. 1983 Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, **14**, 307-317.

Resnick, L., Cauzinille-Marmeche, E., & Mathieu, J. 1987 Understanding algebra. In J. A. Sloboda & D. Rogers(Eds.), *Cognitive processes in mathematics*. Clarendon Press. Oxford.

吉田甫　1983　問題解決における誤った知識構造：分数の計算における例　宮崎大学教育学部紀要，**53**, 41-51.

Yoshida, H.,& Kuriyama, K. 1988 Process of the acqusition of knowledge for understanding fraction. A paper presented in the third Japan-German Science seminar, Tokyo.

付　記

実験にご協力頂きました宮崎市立大宮小学校の校長先生，諸先生，並びに児童の皆様には厚く御礼申し上げます。

本研究は，1988年度発達科学研究教育奨励賞「児童の分数概念の理解過程の分析と教授的介入」の助成を受けて行われた。

(1990年９月30日受理)