宮崎女子短期大学紀要　第24号　81～96頁

子どもの数概念の発達について

栗　山　和　広

The Development of Children's Number Concepts

Kazuhiro KURIYAMA

子どもが数をどのように理解しているかは，古くから人々の関心をひいてきた問題であり，数多くの研究が行われてきた。そうした子どもの数概念の研究の中で，Piaget（1952）は最も体系だった研究を行い，幼児の数概念がそれほど発達していないことを示した。しかし，最近の認知心理学の研究は，Piagetの理論や実験に対する問題点を指摘し，幼児も数概念に関する基本的原理や知識を理解していることを明らかにしている（Gelman & Gallistel, 1978; Gelman & Meck, 1983)。

本論の目的は，幼児の数概念に関するこれまでの研究について概観し，従来の研究の問題点を考察することである。最初に，Piaget（1952）の理論や実験を紹介し，それに対する問題点を指摘する。次に，認知心理学的研究から，乳幼児期の数概念を中心に考察する。特に，認知心理学の研究では，子どもが日常生活の中で獲得している数量に関するインフォーマルな知識について考察する。そして，これらの研究から示唆される今後の課題について検討する。

1．Piagetの数概念の研究

1）Piagetの理論と実験

Piaget（1952）は，子どもが数を理解する際の前提として，数の保存性，基数的側面，序数的側面の理解を上げている。数の保存性とは，不適切な側面を捨てても本質は何ら変わらないことをいう。例えば，おはじきがどんな色であろうと，またおはじきをどのように並べ変えても，数には何の影響もないことをいう。基数とは，ある集合に含まれる要素の個数を示す時に用いる集合数である。序数とは，順位を示すときに用いる数である。Piaget & Szerninska（1941）は，子どもが数を用いた実際の活動で正しく数を理解するには，こうした3つの側面を統合して用いることが必要であると述べている。

こうした数の理解を支える知識として，Piaget（1970）は知識の構造を考えた。そうした知識の構造は，Piagetの知能の4つの発達段階（感覚運動期，前操作期，具体的操作期，形式的操作期）に見られる。4つの段階では，それぞれの独自の知識構造をもっており，それぞれの段階の知識構造が，さまざまな領域の知的問題解決を可能にすると考えられている。それ故，数の理解も，それぞれの段階の知識構造により規定されると考えられた。Piagetは，子どもが数を理解できるのは，

具体的操作期の段階であると述べている。そして，この段階で，群性体と呼ばれる論理－数学的なモデルで定式化される知識構造が現れ，数理解が可能になると考えている。

Piagetは，数の保存性，序数，基数の側面を正しく理解するには，こうした群性体を構成する心的操作が不可欠であるとしている。こうした操作を獲得することのできない具体的操作期以前の段階の子どもは，上述した3つの側面についての理解は不可能であり，それ故に数の本質的な理解も不可能であると考えた。このように，幼児の数理解は群性体と呼ばれる論理－数学的モデルにより説明できる，とPiagetは考えた。

そこで，Piagetはこうした子どもの数理解と群性体の関係を実際に証明するために，数の保存性については数の保存課題から，基数についてはクラスの包含関係から，序数については系列化から検討した。以下に，Piagetが用いた数の保存，クラスの包含関係，系列化の課題について簡単に考察する。

(1) 数の保存

数の保存とは，数の構成単位がどのように配置されていても，それ自体が同一である限り，数は同値であるというものである。こうした数の保存を調べるために用いられた課題が，数の保存課題である。数の保存課題では，2つの列に同じ数だけのおはじきが並べられ，両方の列のおはじきは同じ数あることを確認し，次に，一方の列のおはじきの間隔を変化させ，1対1の対応をさせないようにする。そうして，子どもに列の長いおはじきの方の数が多いことを判断させる，という課題であった。

数の保存ができない子どもは，知覚的な優位性に妨害され，数の本質を理解できないということになる。幼児は，数の保存課題において，数に影響を与える属性だけでなく，数に影響を与えない列の長さや密度といった属性をも含めて，数が多いか少ないかの判断を行っている。幼児は，同一性（形を変えても同じ）・相補性（一方は長いけれどもその分間隔も広い）・可逆性（基に戻すと同じになる），といった数の操作についての論理的な思考をもっていない。それ故に，数の保存課題ができないとPiagetは考えた。

(2) クラスの包含関係

基数の理解をみるためのもう一つの課題は，クラスの包含関係である。基数は集合の要素を示すために用いる数である。そうであるならば，基数が正しく理解されるには集合関係の理解が必要ということになる。集合の関係の中でも，最も基本的な関係は部分－全体関係である。この部分－全体関係をみるための課題として，Piaget & Szeminska（1941）は類の包含課題を考えた。子どもに，木でできた2個の白いビーズと7個の茶色のビーズを示す。子どもは茶色のビーズが白いビーズより多いことは理解できる。しかし，茶色のビーズと木のビーズではどちらが多いかについて尋ねられると，子どもは茶色のビーズが多いと答え，木のビーズが茶色のビーズより多いと答えることができない。これについて，Piaget & Szeminska（1941）は，茶色のビーズが多いという知覚的な優位性が，すべてのビーズは木からできているということの理解を妨害する，と述べている。一次元だけに集中して他の次元を無視するという子どもの思考の特徴によると，Piaget & Szeminska（1994）は考えた。全体と部分について同時に考えることができないために，全体が部分より上位にあるという論理的思考を幼児は持つことができない，と考えたのである。

⑶　系列化

子どもの数概念について検討する際，Piaget & Szeminska（1941）は，序数をとりあげている。基数と異なり，序数ではそれぞれの対象は，ある対象Ａは他の対象Ｂより小さく，対象Ｂは対象Ａより大きいという差異の関係の中で位置づけられている。序数は，１つの対象をすでに数えた対象の１つに対応させないようにするために，あるいはそのどれも忘れないようにするために順序で処理することに意味がある。序数の理解とは，こうした順序的な関係の中で，一連の要素を順序づけて個々の要素を把握することである。

序数を測定するための課題として，Piaget & Szeminska（1941）は系列化課題を考えた。この課題では，子どもに異なる大きさの棒を一番短いものから順番に一番長いものまで一列に並べるように求める。この課題ができたら，さらに別の棒を何本か付け加え，それらが系列の棒のどこに入るかを答えさせる。この課題では，２歳から４歳くらいの子どもは棒を順番に正しく並べることができない。また，５歳くらいになると棒を正しく並べることはできるが，付け加えられた棒がどこにはいるかはかなり試行錯誤的になり答えられない。

こうした系列化課題ができない前操作期以前の子どもは，差異の関係を理解できないということになる。したがって，序数を理解できないとPiaget & Szeminska（1941）は考えたのである。

２）Piagetの理論と実験の問題点

Piagetの理論によれば，前操作期の段階にある幼児は数の本質を理解できないということになる。しかし，幼児は日常生活では，様々な数量に関する経験をしているし，子ども同士また大人とも数量に関するやりとりが行われている。こうしたことを考えると，幼児は数の本質を全く理解できないといっていいのかという疑問が生じる。

最近，Piagetが用いた数の保存課題，クラスの包含課題，系列化課題に対する方法論的な問題を指摘する研究が見られるようになってきた。そこで，数の保存課題，クラスの包含課題，系列化課題に対する問題点について述べ，Piagetの理論や方法論の問題点を考察する。

⑴　数の保存

第１に，Piagetの数の保存課題では，少なくとも６個以上そして12個までの個数を用いていた。Gelman（1972, 1978）は，こうした数の多さが数の保存を困難にさせていることを指摘した。Gelman（1972, 1978）は，幼児が数の保存に失敗するのは，論理的操作を欠いているからではなく，提示された数の多さの評定に自信をもてないからであると考えた。そこで，幼児でも，変形前の評定が容易な小さい数については，不変性の理解が可能であると考えた。彼らは手品実験と呼ばれる巧妙な実験課題から，３以下の小さな個数について数の保存を検討した。その結果，３歳児であっても，３以下の小さい数では保存が成立することを見いだした。また，足立（1985）も，３と５の小さい数の保存課題の成績は，９と11の大きい数の保存課題の成績より高いことを見いだした。これらのことから，数の多さが保存課題の達成に影響していることが考えられる。

第２に，従来の保存課題では，対象の配列の変形に積極的な意図が存在するように見えることが，暗に変形が重要であることを強調している，として課題の手続きの問題点が指摘された（MacGarrigle & Donaldosn, 1975; Neilson & Dockrell, 1982; 上野・塚野・横山，1986）。MacGarrigle & Donaldosn（1975）は，対象の配列の変形があくまでも偶然であることを示そう

として次のような設定を行った。それは，いたずらな人形の熊がやってきて，対象の配列をくずすという設定であった。その結果，こうした設定条件では，実験者が配列を変形する標準的な課題より，数の保存が成立しやすいことを見いだした。また，上野・塚野・横山（1986）は，対象の配列の変形の理由を明らかにすると保存が成立しやすいことを見いだしている。こうした研究から，変形がどのような目的で行われたかという状況が明らかになると，保存反応は成立すると考えられる。

第3に，数の保存課題における計数の重要性を指摘した研究が報告されている（Fuson, Secada & Hall, 1983; Russac, 1978; Saxe, 1979）。Fuson, Secada & Hall（1983）は，子どもの計数は正確で意味があり，同一の数詞はそれと同じ量を意味する，という研究が報告されていることから（Fuson, Richards, & Briaras, 1982; Gelman, 1978），数の保存課題において計数を子どもに行わせた。その結果，標準的な手続きを行った子どもより，計数を行った子どもの方が，保存に成功した子どもが多かった。このことから，子どもは自発的に計数を行わないために保存に失敗するのであり，子どもが数の本質を理解していないのではないことが示唆される。

こうした点から，子どもが数をほとんど理解していないと考えるには無理があると考えられる。Piaget（1952）は，数の保存実験から，具体的操作期の知能を獲得していない子どもの数概念は質的に異なっていると考えた。しかし，子どもの数理解をとらえるには，もっと工夫した課題を考える必要あると思われる。

⑵　クラスの包含課題

クラスの包含課題の実験に関してもいくつもの問題点が指摘されている。第1に，Piagetの類の包含課題における質問は不自然である。日常生活の中で，全体と部分の大小関係を質問することは一般的に考えられない。こうした課題における質問は，子どもにとっても不自然さをあたえるものであり，その結果，子どもは部分と全体の関係より，提示された2つの部分の比較（茶色のビーズと白色のビーズ）の比較であると考えて答えてしまったと考えられる（Trabasso, Isen, Dolecki, MacLanahan, Riley & Tueker, 1978; Klhar & Wallace, 1972; Ahr & Youuniss, 1970）。

第2に，クラスの包含課題では，部分－全体関係についての理解を検討しようとしているが，部分－全体関係とは別な要因によって，この課題の解決が困難になっていることが考えられる（Markman, 1973, 1978, 1979）。Markmanは，集合を2つの集合に区別した。1つは，論理学的な意味での集合でクラスと呼ばれるものである。もう1つは，日常的習慣的に構成される集合でコレクションである。Piaget & Szeminska（1941）がクラスの包含課題で用いた集合はクラスであり，クラスを用いた方がコレクションを用いるより難しいことを，Markman（1973, 1978, 1979）は示した。このように，Piaget & Szeminska（1941）が検討しようとした部分－全体関係は，子どもにとって理解が困難な課題を用いていたと考えられる。

⑶　系列化課題

系列化課題についても問題が指摘されている。こうした課題を解決するためには，まずそれぞれのペアの順序関係を覚えておくことが必要である。しかし，前操作期の以前の子どもにとって，系列化課題でみられるような棒のペアの順序関係を全て覚えることは困難である。棒のペアの数が多くて覚えられないために系列化課題ができなかった可能性が存在する（Bryant & Trabasso, 1971）。もしそうであるならば，子どもは差異の関係を理解できないとはいえないと考えられる。

以上のことから考えると，Piaget & Szeminska（1941）が考えたように子どもが数概念を認識

していることは考え難い。Piagetの理論では，数の保存，クラスの包含，系列化の理解には，群性体を構成するいくつかの操作が必要であり，こうした操作ができない子どもは，数の保存やクラスの包含や系列化が理解できず，数の理解もできないということになる。しかし，数の保存，クラス包含，系列化が達成できないからといって，幼児は数の本質を全く理解できていないとはいえないことが，先述した点から考えられる。

このように，Piagetの理論や方法論には不十分な点が考えられる。第1に，Piagetの発達段階説では，前操作期の子どもと具体的操作期の子どもの認知能力の差異に注目し，具体的操作期の子どもは何ができるかではなく，何ができないかの比較をおこなっている。このような方法論は次のような意味で問題である。前操作期以前の子どもは，数の保存，クラスの包含，系列化ができないから，数の本質を理解していない，とPiagetは考えている。しかし，こうした課題ができないからといって，子どもは全く数概念を持っていないとはいえない。確かに，こうした課題ができるには，数の保存，基数，序数といった側面を理解しておく必要はある。しかし，こうした課題ができないからといって，子どもがこうした側面を全く理解していないとはいえない。即ち，逆は必ずしも成立しないと考えられる。そこで，前操作期の子どもと具体的操作期の子どもの認知能力を十分に捉えるには，子どもは認知領域において“何ができないか”でなく“何ができるか”を明らかにしなければならない（Gelman & Gallistel, 1978）。なぜなら，子どもは，Piagetの実験では現れなかった概念的理解をもっていることが考えられるからである。こうしたPiagetが行った課題では，子どもがもっている基本的概念を十分に評価できなかったと考えられる。

第2の問題点は，発達のメカニズムをどのように考えるかということである。Piagetは，発達の過程とは，先述したように同化と調節と均衡化の過程であると考えた。しかし，発達や学習は既有知識の変化のプロセスであるという考えがある（佐伯・鈴木，1987）。この考えによれば，既有知識を十分に分析しなければ，発達の過程について論ずることはできない。子どもがどのような既有知識を持っているかを明らかにすることが，発達のメカニズムを考える第一歩であるともいえる。ある問題の解決に，子どもの持っている既有知識は重要な働きをしている。しかし，Piagetは子どもがもっている既有知識にほとんど注意をはらっていない。Piagetは論理的な操作だけから課題を解決できると考えていたが，こうした仮定にたてば論理的な操作だけでは問題解決には至らない，と考えられる。子どもの既有知識を詳細に分析することができなければ，発達について論ずることができないといえよう。子どもの既有知識はどのような条件や状況において獲得されるかについての分析が，発達のプロセスを考える際の最も重要な基礎となると考えられる。

2．認知心理学からのアプローチ

1950年代後半から，コンピューターの進歩とともに，知覚や記憶の過程を情報処理の観点から研究する試みが行われるようになってきた。情報処理によるアプローチでは，人間を一種の情報処理体，いわば精巧なコンピューターにたとえて理解しようという考えが浸透してきた。そこでは，問題を情報と考え，問題を解くものを情報の処理者として考え，問題解決者の情報処理過程を詳細に分析していこうとした。人は情報を処理する存在であり，それ故に人の内部で生じている過程を研究の対象にしようという研究が数多く行われるようになった。

そして，1970年代になって，情報処理からの分析を数学教育に応用しようという研究が見られるようになってきた（Brown & Burton, 1978; Brown & Van Lehn, 1980)。さらに，情報処理的アプローチを基礎として，人間の知覚，記憶，思考といった認知機能を明らかにしようという認知心理学のめざましい発展とともに，子どもの数の有能さに関する研究がしだいに明らかにされてきた。また，先述したようにPiaget理論の問題が指摘され，子どもは何を理解しているかという肯定的な側面について検討しようという研究が数多く見られるようになってきた。

そこで，認知心理学からのアプローチを基にした研究について概観する。特に，最近の認知心理学の研究では，子どもは就学前から，数量に関する様々な経験をし，そこから自発的に様々な数概念獲得していることを明らかにしている（Baroody 1993 ; De Corte, Greer & Verschaffel, in press ; 栗山，1995 ; Resnick & Singer, 1993 ; 丸山，1997 ; 吉田，1991)。こうしたインフォーマルな数の知識について以下に考察する。

1）乳児の数理解

乳児も生得的にある程度の数概念をもっていることが明らかにされている。まず，絶対的な数の大きさについての基数的な性質の理解は，驚くほど初期の乳児期から始まっていることが明らかにされている（Antell & Keating, 1983; Starkey & Cooper, 1980; Strauss & Curtis, 1981)。Starkey & Cooper（1980）は，生後10～12か月の乳児を母親の膝に抱かせ，70cm前方にあるスクリーンを見せた。スクリーン上には，ある絵の刺激が提示されており，その特定の数の絵（例えば，２つの絵）を繰り返し提示する。全ての絵を見せた後に，今度は対象の個数を変えて提示する。乳児が，新しい刺激に関心を示せば凝視時間は長くなり，乳児は個数の区別をしたということになる。その結果，３つまでの刺激の数の区別はできることが示された。

数詞を持たない１歳以下の乳児が，数の大きさを弁別できるという結果から，乳児も生得的にある程度の数概念をもっていることが考えられる。さらに，こうした生得的な能力は後の数概念獲得の基礎になっているとも考えられるのである。

こうした乳児が基数を理解している数の弁別過程は，乳児がスビタイズ（subitizng：一目で判断する過程）という知覚的過程の判断によるという研究が報告されている（Klahr, 1973; Chi & Klahr, 1975)。Chi & Klahr（1975）は，点の集合の個数を提示し，個数を判断するまでの反応時間を測定した。その結果，５歳児では１から３までの個数の判断の反応時間の差は小さかったが，４個以上になると１個増えるごとに１秒ずつ反応時間が長くることを見いだした。これらのことから，５歳児は３までの小さい数については，低次の知覚過程である数の即座の把握で数を弁別しており，４以上になると計数による数の集合を区別する，とChi & Klahr（1975）は考えた。そして，大人のスビタイズ可能な範囲は５までであることを見いだしている。

また，Pylyshyn（1989）とTrick & Pylyshyn（1994）は，スビタイズに心的機能としての集合イメージであるFINST（FINgers of INSTantiation）という機能を想定している。人は対象の集合をFINSTと対応させて数を判断する。彼らはスビタイズに２つの段階を仮定している。第１は，集合数をFINSTと照合する段階である。ここでは，スビタイズは数量の認識以前であり，集合を知覚的に区別しているだけである。第２は，集合をFINSTと照合し，それと数詞を結びつけ，集合数をとらえる段階である。FINSTは集合の計数の経験を通して次第にスビタイズの範囲を拡

大していく。こうした考えによると，スビタイズは集合の数が心的に想起できるFINSTの範囲内で生じるということになり，生得的な知覚的過程であると考えられる。

しかし，Gelamn & Gallistel（1978）は，こうしたスビタイズは生得的な低次の知覚的能力ではなく，カウンティングの経験の結果であると述べている。子どもは，最初は一定の集合の大きさを数え，その後同じ同じ集合の大きさを即座に把握するのであり，スビタイズは，計数手続きとは独立に機能するような，数を抽象する方法ではないというものである。彼らは，その証拠として，Chi & Klahr（1975）の実験では，5歳児は2個の数を正確に見積もるには1個の場合より120 msec長くかかり，また3個の数の見積もりではさらに280msec長くかかることをあげている。ただし，小さい数の集合における反応時間の関数の傾きが緩やかであることについては，ある特殊化された素早く行われる計数方略が使用されるとを仮定することにより，スビタイズは素早い計数過程であることの説明は可能であるとしている。

スビタイズは，計数という経験により生じる過程か，それとも生得的な数の弁別能力であるか，という点についてはまだ十分に明らかにされているとはいえない。しかし，スビタイジングが知覚的過程であったとしても，数の基礎的な能力の一つであり，乳児が3までを区別できるということは，人間は生得的に数の能力をもっていると考えられる。

2）数唱と計数

子どもは生まれてから，日常生活で語りかけられる言葉の中で数詞を聞いている。子どもが這う・立つ・歩き始めるときのかけ声は，子どもの動作にあわせて子どもに向けられる数詞である。このような環境の中で，子どもは発語以前に繰り返し言葉としての数詞を聞き，発語する1歳半から2歳ごろには10までの数を唱えるようになる（中沢，1981）。しかし，まだこの段階では数を意味する言葉としてではなく，子どもの生活の中でかけ声やモノを指示する言葉として用いられている（波多野，1968）。また，von glasersfeld（1982）も，子どもが数の概念を形成する前に，知覚されたモノの存在を示す名称として数詞を獲得している，と述べている。中沢（1981）は，生態的観察により，2歳前後では直線上に並ぶモノを見て数唱を行うが，その数唱は系列の順序通りでないことが多いと述べている。そして，3歳前後になると，8割近くの幼児が20までの数詞を数えることが可能になる。4歳後半になると，8割の幼児が30までの数詞を数えられるようになり，100まで数えられるようになる幼児も1割ほど見られるようになる。5歳後半では，70まで数えられる幼児が4割も見られる。そして，小学1年生では100まで数えられる子どもが7割見られ，200まで数えらる子どもも5割ほど見られるようになる（Fuson，1988）。

こうした子どもがモノを数える行為には，数を口で唱える数唱のスキルとモノを数える計数というスキルの2つがある。Fuson, Richards & Briars（1982）とGelman & Gallistel（1978）は，数唱と計数の背後には子どもの数の知識が隠されていることを，かなり詳細に体系的に実験を行っている。

(1) 数　唱

Fuson, Richards & Briars（1982）やFuson（1988）は，子どもの数唱の発達について検討した。彼らは，幼児が数を唱えることができるのは，数に関する知識を幼児がもっているからであると考えた。彼らは，数唱の発達を，数詞の系列の習得と数詞の系列の仕上げという2段階に分けて

いる。数詞の系列の習得の段階は，１から始まる数を順番に慣習的順序で数える。この段階では，数詞の系列は結合した全体として機能しており，それぞれの数詞は独立には用いられない。数詞の系列の仕上げの段階になると，系列内のそれぞれの数詞が区別され，数詞間の関係が強くなり，洗練された複雑な方法で数を構成するようになる。こうした数詞の習得過程から，幼児の数唱には工夫された数唱がみられ，また数唱を用いて足し算や引き算もおこなっていることを，Fuson, Richards & Briars（1982）やFuson（1988）は見いだしている。そこで，数詞の系列の習得と数詞の系列の仕上げの２つの段階について，彼らの考えを詳しく検討することは重要であると考えられる。

数詞の系列の習得の段階では，幼児は数詞と非数詞を区別することが可能である。この段階では，数は基本的には数概念を反映するというより記憶からの再生によることが多く，機械的に数詞を覚えることになる。数系列の形態を観察すると３つに分かれる。１つは，慣習的部分で規則的系列の最初の部分である（例えば，1,2,3,4,5）。数系列の慣習的な部分の数詞は，３歳児で平均14.7，４歳児で17.18，５歳児で40.17である。２つ目は，安定した非慣習的部分である。慣習的系列とはなっていないが，ある子どもたちは共通した数詞を用いる（例えば，7,9,10,12）。安定した非慣習的部分には，脱落（10,12,13）と繰り返し（12,14,14,16)と逆転（15,17,19,18）という主に３つのタイプがある。３つ目は，安定していない系列の部分である。子どもに繰り返し数詞を言わせても一貫性がない系列である。一貫性はないが，完全にランダムとはいえず，一部には規則的順序で出現する。子どもの数系列の形態はこうした３つに表象されている。

数詞の系列の仕上げの段階について，Fuson, Richards & Briars（1982）やFuson（1988）は，数詞の系列は５つの段階を経由して完成すると述べている。５つの段階とは次のとおりである。

第１は糸状段階とよばれる段階である。この段階では，数詞の系列を習得しても，最初の機能は単一の全体構造として機能するだけである。個々の数詞は全体の１つの系列であり別々の数詞がつながっているようにようにしか言えず，またある数は１多いとか１少ないということは全く理解できていない段階である。それ故に，数詞は思考の対象にはならず，単なる数詞の機械的記憶にしか過ぎない段階である。

第２は，分割できない数詞の系列段階である。この段階では，１からある数までの上昇系列の数唱がある程度できるようになる。しかし，まだ数の系列は全体として理解されており，部分に分割することはできない。このように数の分割はできないが，数は思考の対象となってきており，数の規則性も理解している。

また，この段階では下降系列の数唱は困難であるが，１から順番にある数まで数えるcount-allとよばれる方略を用いて，足し算や引き算を行うことが可能になる。これは，ある集合を数え次に他方の集合を数えて，最後に言った数が足し算の結果になる。４歳前半の子どもは，こうした足し算の基礎となる数唱についての知識を習得しており，日常生活の中で足し算や引き算をおこなっている。

第３は，数詞の系列の分割（breakable chain）の段階である。この段階では，１からある数ａまでの上昇系列の数唱が精巧になるだけでなく，ある数ａから別な数ｂまでの数唱も可能になる。ある数ａから別な数ｂまで数える方略はcount-on方略と呼ばれている。こうした方略はかなり数を数えるには効率的な方略である。尚，こうした数唱が可能になるには，数唱をどこで初めてどこ

で終えるかについての情報を記憶に留めておくという短期記憶のある程度の容量が必要になる(Case, Kurland & Daneman, 1979)。

こうしたcount-on方略が可能になると，かなり効率的な足し算ができるようになってくる。これは，1から数えて加算をするcount-all方略と比べれば，時間も少なく，また数えるさいの誤りも少ない効率的な方略である。

さらにこの段階では，上昇方向だけでなく下降方向の数唱も可能になってくる。下降方向の数唱でも，最初にある数bから1まで数える数唱が可能になり，次に，ある数（b）からある数（a）まで数唱が可能になる。こうした数唱が可能になることにより，効率的な引き算も可能になってくる。しかし，下降方向の数唱は幼児にとってはかなり困難である。こうした能力には短期記憶の容量の問題があり，個人差が大きいと考えられる。

第4は，数詞の抽象化の段階である。この段階では，数詞の系列を別々の独立した数として理解するようになる。また，短期記憶の容量が増加し，いろいろな認知過程を行うことが可能になってくる。その結果，ある数aからnだけ上昇方向に数えることや，ある数aからある数bにかけてどれだけの数があるかを，数えるといったこともできるようになる。こうしたことができるためには，数えながら，数えた数がいくつであるかを記憶に保持しておく過程（keeping track）が必要になってくる。そして，数えた数がいくつであるかを保持しておくために，頭の中に数直線を形成した心的数直線（mental number line）を用いるようになる。この段階の数唱は，年長児から小学1年生の子どもにおいて可能になってくる。

第5は，数の基本的理解の段階である。この段階では，数詞を上昇方向からでも下降方向からでも，容易に言えるようになり，方向を変化させることも柔軟にできるようになる。また，数詞の分割も自由にできるようになる。足し算や引き算も，数詞を子どもが理解しやすいように分割して足し算を行うようになる。この段階は，就学後数年を経過してからである。

(2) 計　数

中沢（1981）は，1歳半前後の子どもが，直線上に並ぶモノに興味を示し指さし行動をとり，2歳前後では，身近なモノを直線に一定間隔で並べるようになり，3歳前後では，獲得しつつある数の範囲で集合数と数唱の1対1対応が可能になる，と述べている。このように，2歳から3歳にかけて，子どもは集合数を数える計数が上達してくる。また，Gelman & Galistel（1978）は，手品実験とビィデオテープ実験の詳細な分析から，計数という一見すると単純な技能にも，5つの原理が機能していることを明らかにしている。5つの原理とは以下のようである。

(ア) 1対1対応：1つのモノに数の名前を1つだけ割り当てる原理である。この原理は数を理解するための最も本質的な原理である。

(イ) 安定した順序：用いられる数詞が常に同じ順序で配列される原理である。

(ウ) 基数性：あるモノの集合を数えた場合に，最後の数がその集合の数の大きさを示すという原理である。この原理を用いることにより，ある集合にどれほどのモノが含まれているかを計数により決めることができる。

(エ) 順序無関連：数える順序は関係がないことをいう。モノの集合を左から数えようとまん中から数えようと全体の集合の個数には変化がないという原理である。

(オ) 抽象性：数えるモノが何であろうと全く関係がないという原理である。

Gelman & Galistel（1978）は，１対１対応については２歳児で，安定した順序については３歳児で，基数性については２歳児で，順序無関連についてはほぼ４歳児で，抽象性については３歳児で，既に自発的に獲得していることを見いだした。このように，２歳児といえどもこれらの原理のいくつかをもっており，３歳児では４つもの原理についてはほぼ理解していると考えられる。このように，就学前児がこのような原理を習得していることは興味深い。ただし，子どもは，これらの原理を完全に適用することもないだろうし，適用する集合の大きさも限られた範囲の数であろうし，用いる数系列は慣習的な数詞で用いられるものではないと考えられる（Gelman & Gallistel, 1978)。

Gelman & Gallistel（1978）は，２歳児でもいくつかのこうした原理を理解していることから，これらの原理を大人が体系的に教えているとは考えにくく，これらの原理を生後子どもが習得したと言うより，既に生得的にもっていると考えた方がよいと述べている。

しかし，Briars & Siegler（1984）は，実際に正しくモノを数えることができなかった子どもが，計数の原理を理解していないということから，計数技能を習得した後に計数の原理を理解するのではないかと述べている。このように計数の原理の理解と計数技能の習得のどちらが先であるかについては，まだ決着はついていない。

３）数表象の構造

大人の数表象は，十進法という表象で構成されていることは明らかである。十進法では，10以上の数は10とある数の構成になっており，10という数が１つの単位や基底として数構成の中心的な機能を果たす特異数となっている。このように，十進法は数を任意な全く別々の独立した数系列としてではなく，数の構成から成立している構造として表象している（Hatano, 1982; Resnick, 1983)。

こうした数表象の構造について，就学前の幼児も，日常生活の中で習得する数詞から十進法システムを習得していることが示されている。Siegler & Robinson（1982）は，幼児に数を数えさせ，幼児がどこで数えられなくなるかについて検討した。その結果，幼児がそれ以上数えられなくなる数の頻度が高かったところは，29，39，49などの９で終わる数であった。また，彼らは幼児が数を数える際の誤りについて検討した。その結果，幼児は数詞の誤りとして「27，28，29，50，51，52」のような形をとっていた。これは，幼児が９で終わる数から次の正しい10個の数を飛び越して数えていることを示している。さらに，「29，20-10，20-11」という誤りも多く見られた。また，Fuson, Richards & Briars（1982）は，数唱の誤りの興味ある例として19から30へまたは40へ数え続けるというような次の10個の数をとばして数える事例を報告している。こうした数唱の停止や誤りは，幼児が十進法構造を理解していることの反映であると考えられる。

こうした十進法制については，日本語と英語圏では幼児の理解の程度が異なることが見られている。英語圏での数詞は，１から12までは機械的に記憶しなければならないが，20以上の数詞の習得は数系列の規則を理解すれば可能である。twenty，thirty，fortyと十の位の数詞を覚えれば，後はそれに１桁の数詞を用いれば数詞を作ることができる。しかし，日本語では英語よりも容易に10以上の数詞を覚えることができる（Miura, 1987; Miura & Okamoto, 1988)。日本語では，10までの数詞を覚えれば，10以上の数については，10に１から９までの数詞を順につけ加えればよい。さらに，20以上の数についても，２に10を加えて20，３に10を加えて30というように，英語のよう

に日本語では十の位を覚える必要がない。このように，日本語の数詞は十進法制を習得するのに極めて便利な数詞で構成されているといえる。

このように，大人と同様に就学前の子どもにおいても，10を特異数とした構造が表象されていることが見いだされてきた。しかし，Siegler & Robinson（1982）やFuson, Richards & Briars（1982）の研究は，20以上の数では十進法をもっていることを指摘しており，10以下の数の表象の構造については何ら述べていなかった。

そこで，Yoshida & Kuriyama（1986）と栗山・吉田（1988）は，10以下の数表象の構造について検討した。その結果，幼児は5を特異数として表象していることが示唆された。Yoshida & Kuriyama（1986）は，加算問題と減算問題を提示して，そこでの加数と減数の方略について分析している。幼児がこれらの数を表現する際の方略に興味ある方略が見られた。その中の方略の1つに，数を1つずつ数えていく方略が（Oタイプ）があった。Oタイプには2つのタイプがあった。第1の方略は，数を全てOタイプで表象しているものである。これは普通に見られるタイプであるが，第2の方略は“5”と直接に関連したパターンである。6以上の数を数える際，5までは数唱なしに一気に指を広げて，それから残りの数を1つずつ数えていくタイプが見いだされた。こうした2つの方略で後者のパターンが幼児には多く見られた。このことは，幼児が5を特異数とした構造を表象していることを示唆するものと考えられた。さらに，栗山・吉田（1988）は，こうした課題では幼児に指を使わせる課題を用いていたことから，指に依存しない数唱課題を用いて5の特異数が内的に表象された構造であるか否かを検討した。その結果，幼児が誤って数えた答えである誤答の内容を分析したところ興味深い誤りが見られた。それは，数唱において停止すべき数で停止できないで，他の数まで続けて数える誤りであった。こうした誤りについてみると，上昇系列の数唱で上端が5の数で停止できないない者は皆無であった。こうした停止すべき数が5の場合に容易に停止するということは，単なる偶然でなく幼児が5を特異数として構造を表象していることによると考えられる。

また，栗山・吉田（1995）は，幼児において見いだされた5の特異数の構造が，就学後公的に十進法を学習する小学生にも見られるかについて検討した。その結果，小学1年生では5の特異数の構造が見られたが，小学4年生では5の特異数の影響が見られなくなることを見いだした。

Resnick（1983）は，10以下の数の表象の構造については，何らの構造もない心的数直線として表象されていることを指摘した。しかし，10以下の数において，幼児は5を特異数とした構造を表象していることが示唆される。また，5の特異数をもつ構造は十進法制の学習とともに影響が小さくなることが示唆される。

4）加算と減算

子どもは，生得的な数能力を基に日常生活の経験を通して数唱や計数をしだいに発達させてくる。そして，先述した数唱や計数で見られた様々な方略や原理を用いて，公的な指導を受ける前に幼児は足し算や引き算をおこなうようになる。

ここでは，子どもが加算や減算を解決する際にどのような方略を用いているかについて，ミン（min）モデル，連合分布（distribution of association）モデル，から考えることにする。

(1) ミン（min）モデル

子どもは，最初は具体物を用いて足し算や引き算を行うが，次第に心的に足し算や引き算を行えるようになる。Groen & Parkman（1972）は，子どもは頭の中で足し算の2つの数の大きい数を最初に選び，それから小さい方の数を加えていくというミン（min）モデルを提唱した。子どもは数を足す場合に，常に小さい数の分だけ数えるやり方を使うという仮定である。このモデルでは，例えば2＋6の足し算で，最初に大きい数である6を選び，それから2つ数えて「7，8」と答をだす方略を子どもは用いると考えている。彼らは，小学1年生に加算問題をおこなわせ，問題解決の反応時間の分析から，こうした予測の正しいことを見いだした。さらに，Groen & Resnick（1977）は，幼児も最小方略を用いることを見いだしている。また，Svenson（1975）は小学3年生に，Svenson & Broquist（1975）は高学年の能力の低い子どもに，同様の方略が用いられることを見いだしている。

さらに，引き算においても，小学校低学年の子どもはミンモデルを用いることが見いだされている。Woods, Resnick, & Groen（1975）は，減算における最小モデルの手続きとして2種類あると述べている。1つは，2つの数の内で，小さい数から大きい数に達するまでに数えた回数を答えとする手続きである。もう一つは，大きい数から小さい方の数の回数だけ下降方向に2回数えて，答えを出すという手続きである。

最小方略は，公的に教えられた方略ではないことは明らかである。最小方略は，子ども自らが効率的な方略として自ら作り上げたものである。こうした認知的に効率的な方略を，状況に応じて子どもは用いることができることは，子どもの数に関する有能性を示すものである。

(2) 連合分布（distribution of association）モデル

Siegler & Shrager（1984）は，幼児が足し算を解く際の場面をビィデオテープに録画し，その分析から，幼児は最小モデル以外にもいろいろな方略を用いることを見いだしている。そこで見いだされた方略とは，指をおって数える，指を見ながら声を出して数える，指をだすがそれを数えないで答える，記憶から答えをだして答える，といった方略である。そして，これらの方略と問題の困難さには相関があることを見いだした。それは，子どもが難しい問題であると判断すると目に見える方略を用い，容易な問題であると判断すると記憶から検索する方略を用いるというものであった。

Siegler（1987）は，幼稚園児と小学1年生と小学2年生に足し算問題を呈示し，こうした方略の発達的変化について検討している。そこでは，子どもは検索，ミン，分解（例えば，12＋3＝10＋〔2＋3〕），count-all，推測といった5つの方略を用いていることが見られた。そして，幼児はさまざまな方略を用いるが，加齢とともに，検索方略の割合がしだいに増加し用いられる方略が少なくなっている。これは，足し算の練習経験が増加するとともに，問題と答えの連合分布がピークになり，正しい答えとして自信をもてるようなり，検索の方略が増加したことによると考えられる。

このように，幼児は問題解決に際し多様な方略をもち，それを状況に応じて適応的に選択していると考えられる。また，一人の幼児は決して1つの方略だけでなく，いろいろな方略を用いていることも見いだされている（Siegler & Jenkins, 1989）。

3．まとめと考察

幼児の数概念の研究について，Piagetの理論と実験について概観し，その問題点を指摘した。そして，認知心理学の研究として，乳児の数理解，幼児の数唱と計数，数表象の構造，加算と減算について考察した。

Piagetの数概念に関する理論では，子どもの数理解には群性体と呼ばれる心理的操作が不可欠であるとされている。子どもの数理解の本質は，論理数学的構造の獲得にあり，子どもが数を数えたり，足したりすることは，意味のない機械的な手続きにしかすぎない，とPiaget考えた。しかし，上述した認知心理学の研究から見られるように，子どもは自ら考案したcount-onという数唱方略やミンモデルでみられる方略を用いて加算や減算を行っている。さらに，5を特異数とする構造を公的な教育を受ける前に日常生活の中で獲得している。このことは，子どもは我々大人が考える以上に驚くほどの学習能力を持っていることを示唆している。子どもは公的な教育を受けなくても，ある種の数学上の概念や手続きを自発的に獲得し，それらをさまざまな場面で適切に用いることができるといえる。

ところで，認知心理学の研究はそれぞれの領域に特別な構造を想定する領域特殊性説の立場をとっている。領域特殊性説では，特定の領域の概念にのみ注目し，特定の概念のみを検討する。そのために，こうしたアプローチでは，特定の概念について膨大な情報を得ることができ，それぞれの概念について特有な発見ができる，という大きな長所がある。しかし，そこで得られた情報自体他の概念への適用ができないという短所が考えられる。即ち，異なる概念の間に共通な発達的統一性も見いだすという点では十分なアプローチとはいえない。それに対し，Piagetの発達段階説で述べられた全体構造の立場をとる領域一般性説領域は，ある発達段階に共通な領域の問題解決における方略の発達を考えている。これは，いくつかの領域の概念一般においてその方略は有効であり，異なる概念の間に共通な発達的統一性のある理論であるといえる。それ故，今後は，認知心理学の研究で見いだされた特定の領域の概念の情報を統一し，統一性のあるモデルを検討する必要があると考えられる。

引　用　文　献

足立知昭　1985　数の保存課題における反応標準とセットサイズ効果との関連について　心理学研究，**56**，99-102.

Ahr, P. R., & Youniss, J. 1970 Reasons for failure on the class inclusion problem. *Child Development*, **41**, 131-143.

Antell, S. E., & Keating, D. P. 1983 Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development*, **54**, 695-701.

Baroody, A.J. 1993 Fostering the mathematical learning of young children. In B. Spodek (Ed.), *Handbook of research on the education of young children*. NY : Macmillan. Pp.151-175.

Briars, D. & Siegler, R.S. 1984 A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology*, **20**, 607-618.

Brown, J.S., & Burton, R.R. 1978 Diagnostic models for procdual bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, **2**, 155-192.

Brown, J.S., & VanLehn, K. 1980 Repair theory : A generative theory of bugs in procedual skills. *Cognitive Science*, **4**, 379-426.

Bryant, P. E., & Trabasso, T. 1971 Transitivity inferences and memory in young children. *Nature*, **232**, 456-458.

Case, R., Kurland, M. & Daneman, M. 1979 Operational efficiency and the growth of M-space. Paper presented at the Biennial Meeting of the Society for Research in Child Development, San Francisco, March, 1979.

Chi, M. T. H., & Klahr, D. 1975 Span and rate of apprehension in children and adults. *Journal of Experimental Child Psychology*, **19**, 434-439.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. in press Mathematics teaching and learning. In D. Berliner, & R. Calfee (Eds.), *Handook of Educational Psychology*. N.Y. : Macmillan.

Fuson, K. C., Richards, J., & Briars, D. J. 1982 The acquisition and an elaboration of the number word sequence. In C. Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition : Progress in cognitive developmental research*. Vol.1. New York: Springer-Verlag. Pp.33-92.

Fuson, K. C., Secade, W. G., & Hall, J. W. 1983 Matching, counting, and conservation of number eqivalence. *Child Development*, **54**, 91-97.

Fuson, K. C. 1988 Children's counting and concepts of number. New York: Springer-Verlag.

Gelman, R. 1972 Logical capacity of very young children: Number invariance rules. *Child Development*, **43**, 75-90.

Gelman, R. 1978 Cognitive Development. *Annual Review of Psychology*, **29**, 297-332.

Gelman, R., & Gallistel, C.R. 1978 The child's understandting of number. Cambridge, MA: Harvard Univ Press.

Gelman, R., & Meck, E. 1983 Preschooler's counting: Principles before skill. *Cognition*, **13**, 343-359.

Groen, G. J., & Parkman, J. M. 1972 A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, **79**, 329-343.

Groen, G. J., & Resnick, L. B. 1977 Can preschool children invent addition algorithms? *Journal of Educational Psychology*, **69**, 645-652.

Greeno, J. G., Riley, M. S., & Gelman, R. 1984 Conceptual competence and children's counting. *Cognitive Psychology*, **16**, 94-143.

波多野完治　1968　言葉の発達心理　岩淵悦太郎・波多野完治・内藤寿七郎・切替一郎・時実敏彦・沢島正行・滝沢武久　ことばの誕生：うぶ声から五歳まで（Pp.179-234）．東京：日本放送出版協会．

Hatano, G. 1982 Learning to add and subtract: A Japanese Perspective. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Hillsdale, NJ: LEA. Pp. 211-223.

Klahr, D., & Wallace, J. G. 1972 *Cognitive Development: An information-processing view*, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Klahr, D. 1973 Quantification processes. In W.G. Chase (Ed.), *Visual information processing* . New York: Acdamic Press. Pp.3-34

栗山和広・吉田甫　1988　幼児の数表象の構造－数唱分析からの検討－　心理学研究, **59**, 287-294.

栗山和広・吉田甫　1995　心的加算における数の表象構造について　教育心理学研究, **43**, 402-410.

栗山和広　1995　数概念　吉田甫・多鹿秀継（編著）認知心理学から見た数の理解　北大路書房　Pp.11-32.

丸山良平・無藤隆　1997　幼児のインフォーマル算数について　発達心理研究, **8**, 98-110.

Markman, E. M. 1973 Facilitation of part-whole comparison by use of the collective noun "family". *Child Development,* **44**, 837-840.

Markman, E. M. 1978 Empirical versus logical solutions to part-whole comparison problems concering classes and collections. *Child Development,* **49**, 168-177.

Markman, E.M. 1979 Classes and collections: Conceptual organization and numerical abilities. *Cognitive Psychology,* **11**, 395-411.

MacGarrigle, J., & Donaldosn, M. 1975 Conservation accidents, *Cognition,* **3**, 341-350.

Miura, I. T. 1987 Mathematical achievement as a function of language. *Jouranal of Educational Psychology,* **79**, 79-82.

Miura, I. T., & Okamoto, Y. 1988 Comparisons of U.S. and Japanese first graders' cognitive representation of number and understanding. *Journal of Educational Psychology,* **81**, 109-113.

中沢和子　1981　幼児の数と量の教育　東京：国土社

Neilson, I. & Dockrell, J. 1982 Cognitive tasks as interactional setting. In G. Butterworth & P. Light (Eds.), *Social cognition : Studies of the development of understanding*. Brighton, England : Harvester.

Piaget, J., & Szeminska, A. 1941 *La gênèse du nombre chez l'enfant.* Neuchâtel: Delachaux et Niestlé. 遠山啓・銀林浩・滝沢武久（訳）1962　数の発達心理学：国土社

Piaget, J. 1952. The child's conception of number. New York. (Original French Edition, 1941).

Piaget, J. 1970 L'épitémologie génétique. Prees Unversitaires de France. 滝沢武久（訳）発生的認識論：白水社

Pylyshyn, Z. 1989 The role of location indexes in spatial perception: A sketch of the FINST spatial-index model. *Cognition,* **32**, 65-97.

Resnick, L. B. 1983 A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.) *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press. Pp.107-130.

Resnick, L.B., & Singer, J.A. 1993 Protoquantive origins of ratio reasoning. In T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers : An investgation of research.* Hillsdale, NJ : LEA. Pp. 107-130

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. 1983 Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (ED.), *The development of mathematical thinking* New York: Academic Press. Pp.153-192.

Russac, R.J. 1978 The relation between strategies of cardinal number : correspondence and counting. *Child Development,* **49**, 728-735.

Saxe, G.B. 1979 Developmental relations between notational counting and number conservation. *Child*

Development, **50**, 180-187.

佐伯胖・鈴木宏昭　1987　認知科学における工学的アプローチの効用と限界　大須賀節雄・佐伯胖（編）知識工学講座第三巻　知識の獲得と利用　オーム社

Siegler, R. S. & Robinson, M. 1982 The development of numerical understanding. In H. W.Reese & L. P. Lipsett (Hds.), *Advances in child development and behavior.* Vol.16. New York: Academic Press. Pp.242-308.

Siegler, R. S. 1987 Strategies choices in subtraction. In J. A. Sloboda & D. Rogers (Eds.), *Cognitive process in mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

Siegler, R. S. 1987 The perils of averaging data over strategies: An example from children's addition. *Journal of Experimental Psychology: Genral,* **116**, 250-264.

Siegler, R. S., & Shrager, J. 1984 Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Siegler, R. S., & Jenkins, E. 1989 *How children discover new strategies.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Strauss, M. S., & Curtis, L. E. 1981 Infants perception of numerosity. *Child Development,* **52**, 1146-1152.

Starkey, P., & Cooper, R. S. 1980 Perception of numbers by human infants. *Science,* **210**, 1033-1035.

鈴木宏昭　1986　子どもの一対一対応の知識はいかに表象されているか　発達研究，**2**，147-156.

Svenson, O. 1975 Analysis of time required by children for simple additions. *Acta Psychologia,* **39**, 289-302.

Svenson, O., & Broquist, S. 1975 Strategies for solving simple additon problems: A comparison of normal and subnormal children. *Scandinavian Journal of Psychology,* **16**, 143-151.

Trabasso, T., Isen. A., Dolecki, P., McLanahan, A. G., Riley, C. A., & Tucker, T. 1978 How do children solve class-inclusion problems? In R. S. Siegler (Ed.), *Children's Thinking : What Develops?* Hillsdale, NJ : Erlbaun

Trabasso, T., Isen. A.I., Dolecki, P., McLanahan, A.G., & Riley, C.A. and Tucker,T. 1975 How do children solve clas-inclusion problerms? In R.S. Siegler (Ed.), *Children's Thinking : What Develops?* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N. J.

Trick, L. M., & Pylyshyn, Z. W. 1994 Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review,* **101**, 80-102.

上野直樹・塚野弘明・横山信文　1986　変形に意味ある文脈における幼児の数の保存概念　教育心理学研究，**34**,94-103.

von Glasersfeld, E. 1982 Subitizing : The role of figural patterns in the develpment of numerical concept. *Archives des Psychologie,* **50**,191-218.

Woods, S.S., Resnick, L.B., & G.J. 1975 Experimental test of five process models for subtraction. *Journal of Educational Psychology,* **12**, 289-297.

Yoshida, H., & Kuriyama, K. 1986 The numbers 1 to 5 in the development of children's number concepts. *Journal of Experimental Child Psychology,* **41**, 251-266.

吉田甫　1991　子どもは数をどのように理解しているのか　東京：新曜社.

[1997年11月29日受理]